JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ A MATEMATIKA KÖZÉPSZINTŰ ÍRÁSBELI 2. FELADATSORHOZ

Formai előírások:

- A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől eltérő színű tollal kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
- A feladatok mellett található téglalapok közül az elsőben a feladatra adható pontszám van, a javító által adott pontszám a mellette levő téglalapba kerül.
- Kifogástalan megoldás esetén elég a megfelelő maximális pontszám beírása a téglalapokba.
- Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes *részpontszámokat* is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

- Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól *eltérő megoldás* születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit és ennek alapján pontozzon.
- A pontozási útmutató pontjai tovább *bonthatók*. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
- Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél *kevésbé részletezett.*
- Ha a megoldásban *számolási hiba*, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
- *Elvi hiba* esetén, egy gondolati egységen belül a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban az elhibázott részt egy újabb részkérdés követi, és a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot.
- Egy feladatra adott megoldások közül csak egy (a magasabb pontszámú) értékelhető.
- A megoldásokért jutalompont (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) nem adható.
- A vizsgadolgozat I. részében kitűzött feladatok esetében elég a helyes választ megadni, amennyiben a feladat szövege nem rendelkezik másképp. A javítás során azt az eredményt, illetve megoldást kell figyelembe venni, amit a vizsgázó az erre a célra szolgáló keretbe írt. Ha ott esetleges hibás megoldás áthúzása miatt nem maradt hely a vizsgázó által helyesnek ítélt válasz számára, akkor figyelembe vehető a kereten kívül szereplő helyes válasz is.
- Az olyan részszámításokért, részlépésekért nem jár pontlevonás, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
- Ha a pontozási útmutató a feladat ellenőrzéséért pontot ad, akkor az csak abban az esetben adható meg, ha a vizsgázó valamilyen formában írásban rögzíti az ellenőrzés tényét. (Itt minden elvileg helyes módszer elfogadható.)
- A középszintű vizsgafeladatsor II/B részében kitűzött 3 feladat közül csak 2 feladat megoldása értékelhető. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, melynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani, csak a többi feladatot. Ha ezen előírások alapján a javító számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a *nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó* feladat lesz

I.

1.		
A = {1;3;5;7;9} B = {2;3;5;7}		*Az elemek felsorolásáért nem jár pont.*
$A \cap B$ = {3;5;7}	1 pont	
A\B = {1;9}	1 pont	*Jó halmazábra is elfogadható.*
Összesen:	**2 pont**	*Ha nem használja a halmazjelölést, csak felsorol, akkor is jár a pont.*

2.		
a) hamis	1 pont	
b) hamis	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	

3.		
X = 2	1 pont	
X = 6	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	*Ha a helyes számok mellett rossz számjegyek is szerepelnek: 0 pont*

4.		
x = 4	2 pont	*Levezetés nélkül is jár a 2 pont.*
Összesen:	**2 pont**	

5.		
$\frac{x^2-1}{x-1}=\frac{(x+1)\cdot(x-1)}{x-1}=$	1 pont	*A nevezetes azonosság felírásáért.*
$= x + 1$	1 pont	*A jó végeredményért.*
Összesen:	**2 pont**	

6.		
Az elnököt 10 tagból 10-féleképpen, a titkárt pedig 9 tagból 9-féleképpen lehet kiválasztani: 10 ·9.	1 pont	
90	1 pont	*Ha csak a végeredményt közli, akkor 1 pont adható.*
Összesen:	**2 pont**	

7.		
$\overrightarrow{DE} = \underline{a}$	1 pont	*Ha $\underline{a}$ helyett $\overrightarrow{BA}$ szerepel, az is elfogadható.*
$\overrightarrow{BK} = \underline{a} + \underline{b}$	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

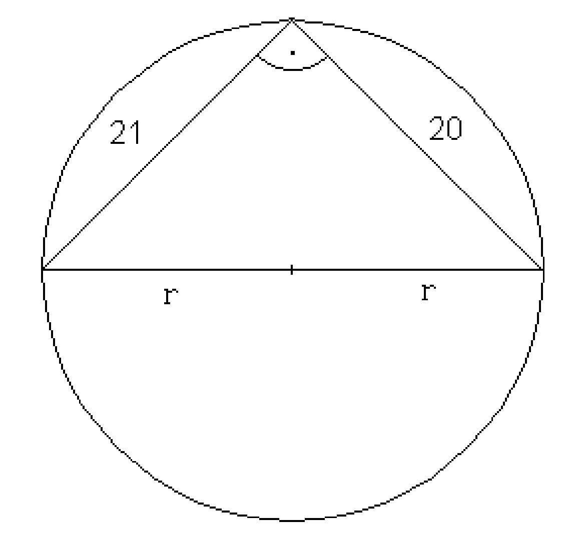
8.		
A lehetőségek: fff; ffi; fif; iff; <u>fii</u>; <u>ifi</u>; <u>iif</u>; iii.	1 pont	
A nyolc közül csak három jó, ezért az esély $\frac{3}{8}$.	2 pont	*Ha csak a jó végeredményt írja fel, akkor is jár a 2 pont.*
Összesen:	**3 pont**	

9.		
$x^2 - 1 = 15$		
$x^2 = 16$	2 pont	*Ha az $x^2 = 16$ egyenletig eljut.*
$x = 4$	1 pont	
$x = -4$	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	*Ha $\lvert x \rvert = 4$ a végeredmény, azért 3 pont adható.*

10.		
a) $x \le 5$	2 pont	*Ha az egyenlőség nem szerepel, akkor 1 pont adható.*
Összesen:	**2 pont**	
b) $x < 5$	2 pont	*Ha az egyenlőséget is megengedi, akkor 1 pont adható.*
Összesen:	**2 pont**	

11.		
É.T: [1; 5]	2 pont	
É. K: [–3; 2]	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	*Ha valamelyik intervallum pontatlan, akkor arra a részre csak 1 pont jár.*

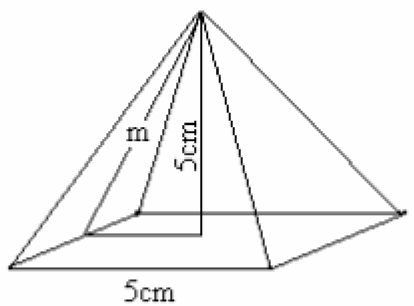
II/A

12.  	2 pont	*Megfelelő rajz (kör; átmérő két végpontja és egy kerületi pont).*
Derékszögű háromszög.	2 pont	*Thalész-tétel említése szövegben, vagy a derékszög jelölése a rajzon.*
$(2r)^2 = 20^2 + 21^2$	3 pont	*Pitagorasz-tétel felírása.* *Ha a zárójel hiányzik, de úgy folytatja, mintha lenne, akkor csak 2 pont jár.* *Ha a zárójel hiányzik, és e szerint is folytatja, akkor az egész feladatra maximum 8 pontot kaphat.*
$4r^2 = 400 + 441$	1 pont	
$r^2 = \frac{841}{4}$	2 pont	*Egyenletrendezés.*
$r = \sqrt{210{,}25}$		
$r = 14{,}5$	1 pont	*A sugár jó kiszámolása.*
Tehát a keresett sugár 14,5 méter.	1 pont	*Szöveges válasz. Ha nem ír szöveges választ, de helyes eredményt ad meg mértékegységgel együtt, akkor is jár az 1 pont.*
Összesen:	**12 pont**	

13.		
a)		
Naponta 152 liter,		
ennek 30%-a: 152 liter · 0,3 = 45,6 liter.	1 pont	
A megtakarítás naponta:		
45,6 liter· 0,25 = 11,4 liter.	1 pont	*Ha a mértékegységet nem írja ki*
10^7 lakosra: 11,4 · 10^7 liter.	1 pont	*minden sorban, az is elfogadható.*
1 év alatt: 11,4 · 10^7 · 365 liter = = 4,161 · 10^{10} liter	1 pont 1 pont	
A megtakarítás: 4,161 · 10^7 m^3.	1 pont	*A mértékegységnek a végeredményben szerepelnie kell.*
Összesen:	**6 pont**	
b) *1. megoldás*		
A megtakarítás %-ban kifejezve:		
0,3 · 0,25 = 0,075 , azaz 7,5%.	3 pont	
Összesen:	**3 pont**	
2. megoldás Az éves összes vízfogyasztás: $152\cdot10^{-3}\ m^3\cdot10^7\cdot365 = 5{,}548\cdot10^8\ m^3$.	1 pont	
A megtakarítás %-ban kifejezve: $\frac{4{,}161\cdot10^7\,m^3}{5{,}548\cdot10^8\,m^3} = 0{,}075$,	1 pont	
azaz 7,5%.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	
c)		
A lakossági megtakarítás naponta:		
11,4 · 10^7 liter = 11,4 ·10^4 m^3.	1 pont	
A lakossági megtakarítás értéke:		
11,4 ·10^4 m^3 · 140 Ft/m^3 = 15 960 000 Ft naponta. Normálalakban: 1,596 · 10^7 Ft.	1 pont 1 pont	
Összesen:	**3 pont**	*Ha az a) részben rossz eredményt kap, és ezzel jól számol a b) és a c) részben, akkor ezekre jár a 3, ill. 3 pont.*
14.		
a) Az átlag: $\frac{3+4+7+x+y}{5} = 6{,}5$.	1 pont	
$x + y = 18{,}5$.	1 pont	
A módusz 4, ezért a 4 legalább kétszer előfordul:	1 pont	
az egyik szám 4;	1 pont	*Bármilyen helyes gondolatmenettel kapott helyes eredményért 5 pont jár.*
a másik pedig 14,5	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

b) A medián: 4, mivel a	1 pont	
3; 4; 4; 7; 14,5 adatsorban a középső éppen 4.	2 pont	
Összesen.	**3 pont**	
c) $\sigma = \sqrt{\dfrac{(6{,}5-3)^2 + 2\cdot(6{,}5-4)^2 + (6{,}5-7)^2 + (6{,}5-14{,}5)^2}{5}}$	2 pont	*Ha nem írja fel a képletet, hanem a számológép segítségével számol, akkor is jár a 2 pont.*
Az adathalmaz szórása: 4,22.	2 pont	
Összesen:	**4 pont**	

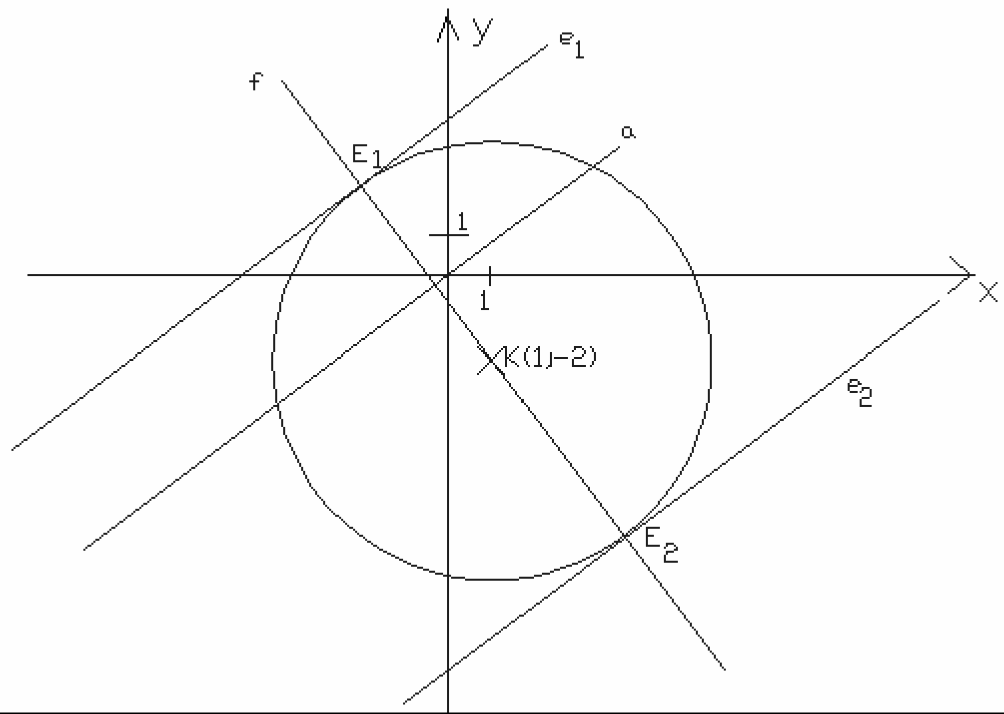
II/B

A 15–17. feladatokból csak kettőt kellett megoldani, és csak kettő értékelhető.		
15.		
a)		
		
A négyzetes gúla térfogata:		
$V_{gúla} = \dfrac{T\cdot M}{3} = \dfrac{a^2\cdot M}{3}$ $V_{gúla} = \dfrac{5^3}{3} = \dfrac{125}{3} \approx 41{,}67$ 1 db gúla térfogata 41,67 cm^3.	2 pont	*A gúla térfogatának kiszámítása. A mértékegység és a szöveges válasz itt nem feltétlenül szükséges.*
100 db-ra elég a nyersanyag, azaz a nyersanyag térfogata:		
$V_{100} = \dfrac{12500}{3} \approx 4166{,}67$ Tehát a nyersanyag térfogata 4166,67 cm^3.	1 pont	*100 db térfogata. Ha nem ír szöveges választ, de helyes eredményt ad meg mértékegységgel együtt, akkor is jár az 1 pont.*
Összesen:	**3 pont**	

b) $A = a^2 + 4 \cdot \frac{a \cdot m}{2}$		
Pitagorasz-tétel alkalmazása:		
$m^2 = 5^2 + 2{,}5^2$ $m = 5{,}59$. A gúla oldalapjának magassága 5,59 cm.	1 pont 1 pont	*Az oldallap magasságának kiszámítása. A mértékegység és a szöveges válasz itt nem feltétlenül szükséges.*
$A_1 = 5^2 + 4 \cdot \frac{5 \cdot 5{,}59}{2} = 80{,}9$ Egy gúla felszíne: 80,9 cm^2.	2 pont	*Egy gúla felszínének kiszámítása. A mértékegység és a szöveges válasz itt nem feltétlenül szükséges.*
100 gúla felszíne: $A_{100} = 8090\ cm^2 =$ $= 0{,}809\ m^2$	1 pont 1 pont	*100 gúla felszíne m^2-ben megadva. A mértékegység megadása szükséges.*
Költség = 1200 · A_{100} = 970,8. Tehát a festés költsége 970,8 Ft.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	
c)		
A 100 gúla közül 95 hibátlan és	1 pont	
5 hibás.	1 pont	
A kiválasztott 8 között nincs selejtes, tehát ezt a nyolcat a hibátlanok közül kell kiválasztani.		
95 hibátlanból 8-at kell kiválasztani úgy, hogy a gúlák sorrendje közömbös, ezért: $\binom{95}{8}$.	2 pont	*Indoklás nélkül is elfogadható a jó eredmény.*
Összesen:	**4 pont**	
d)		
Ebben az esetben 3 selejtest kell kiválasztani az 5 hibásból: $\binom{5}{3}$,:	1 pont	
és 5 jót pedig a 95 hibátlanból: $\binom{95}{5}$.	1 pont	
A kedvező lehetőség: $\binom{5}{3} \cdot \binom{95}{5}$.	1 pont	
Az összes lehetőség: $\binom{100}{8}$.	1 pont	
A végeredmény: $\frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{95}{5}}{\binom{100}{8}} = 3 \cdot 10^{-3}$	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	

16.		
a) $4^{2x^2-26x+75}=4^3$	1 pont	
Az exponenciális függvény monotonitása miatt:	1 pont	
$2x^2-26x+75=3$	1 pont	*Ha azt mutatja meg, hogy ezek jó gyökök, de nem mutatja meg, hogy más megoldás nincs, akkor 2 pont adható.*
$x_1=9$	1 pont	
$x_2=4$	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	
b)		
Tehát a számtani sorozatban $a_1=9$ *és* $d=4$	2 pont	*Ha ezt nem írja fel külön, de jól alkalmazza, akkor is jár ez a pont.*
$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{2a_1+(n-1)\cdot d}{2}\cdot n$		
$S_5=\frac{18+4\cdot 4}{2}\cdot 5$	1 pont	
$S_5=85$	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	
c)		
$S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{2a_1+(n-1)\cdot d}{2}\cdot n$		
$3649=\frac{18+(n-1)\cdot 4}{2}\cdot n$	2 pont	
$2n^2+7n-3649=0$	2 pont	
$n_1=41$	1 pont	
$n_2=-44{,}5$	1 pont	
Ez nem megoldása a feladatnak.	1 pont	
Tehát az első 41 tag összege 3649.	1 pont	*Nem szöveges válasz esetén is jár a pont.*
Összesen:	**8 pont**	

17.		



<u>1. megoldás</u>		
$x^2+y^2-2x+4y-20=0$		
$(x-1)^2+(y+2)^2=25$	2 pont	*A kör egyenletének rendezéséért.*
$K(1;-2)$	1 pont	*A középpont meghatározásáért összesen 3 pont adható.*
$a: 3x-4y=0$ $\underline{n}_a(3;-4)$	1 pont	*Az a egyenes normálvektorának felírásáért.*
$\underline{n}_f(4;3)$	1 pont	*Az f egyenes normálvektorának felírásáért.*
$K(1;-2)$		*Az f egyenes egyenletéért összesen 3 pont adható.*
$f: 4x+3y=-2$	1 pont	
Az egyenes és a kör metszéspontja adja az érintési pontokat:		
$4x+3y=-2$ $\underline{x^2+y^2-2x+4y-20=0}$	1 pont	*Az egyenletrendszer felírásáért.*
$x^2-2x-8=0$ vagy $y^2+4y-12=0$	4 pont	*Valamelyik egyismeretlenes egyenletért.*
$x_1=-2$ $x_2=4$	1 pont	*A gyökök.*
$y_1=2$ $y_2=-6$	1 pont	*A másik két gyök.*
E_1 (-2 ; 2) E_2 (4 ; -6)	2 pont	*Az érintési pontok.*
Az érintők egyenlete:		
$3x-4y=36$ $3x-4y=-14$	1 pont 1 pont	
Összesen:	**17 pont**	

2. megoldás		
Az érintők párhuzamosak a megadott egyenessel, ezért paraméteres egyenletük:		
$3x-4y=c$ $y=\dfrac{3x-c}{4}$	2 pont	*Az érintő paraméteres egyenletének felírásáért.*
$x^2+\left(\dfrac{3x-c}{4}\right)^2-2x+4\cdot\dfrac{3x-c}{4}-20=0$	1 pont	*A kör egyenletébe való behelyettesítéséért.*
$25x^2+(-6c+16)x+c^2-16c-320=0$	3 pont	*A paraméteres másodfokú egyenlet rendezett alakjáért.*
Az egyenesnek és a körnek akkor van egy közös pontja, ha az egyenlet diszkriminánsa nulla.	2 pont	*A feltétel megfogalmazása szövegben vagy jelöléssel.*
$D=(-6c+16)^2-100(c^2-16c-320)=0$	3 pont	*A diszkrimináns felírásáért.*
$c^2-22c-504=0$	2 pont	*Másodfokú egyenlet rendezett alakjáért.*
$c_1=36$ $c_2=-14$	1 pont 1 pont	
Az érintők egyenlete:		
$3x-4y=36$ $3x-4y=-14$	1 pont 1 pont	
Összesen:	**17 pont**	