1. MATEMATIKA EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI FELADATSOR

- A feladatok megoldására 240 perc fordítható, az idő leteltével a munkát be kell fejeznie.
- A feladatok megoldási sorrendje tetszőleges.
- A II. részben kitűzött öt feladat közül csak négyet kell megoldania**. A nem választott feladat sorszámát írja be a dolgozat befejezésekor az alábbi négyzetbe!** Ha a javító tanár számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy melyik feladat értékelését nem kéri, akkor az utolsó feladatra nem kap pontot!

- A feladatok megoldásához zsebszámológépet és négyjegyű függvénytáblázatot használhat, más elektronikus vagy írásos segédeszköz használata tilos!
- A feladatok megoldásához alkalmazott gondolatmenetét minden esetben írja le, mert a feladatra adható pontszám jelentős része erre jár!
- Ügyeljen arra, hogy a lényegesebb részszámítások is nyomon követhetőek legyenek!
- A feladatok megoldásánál használt tételek közül az iskolában tanult, névvel ellátott tételeket (pl. Pitagorasz-tétel, magasság-tétel) nem kell pontosan megfogalmazva kimondania; elég csak a tétel megnevezését említeni, de alkalmazhatóságát röviden indokolni kell. Egyéb tétel(ek)re való hivatkozás csak akkor fogadható el teljes értékűnek, ha az állítást minden feltételével együtt pontosan mondja ki (bizonyítás nélkül), és az adott problémában alkalmazhatóságát indokolja.
- A feladatok végeredményét (a feltett kérdésre adandó választ) szöveges megfogalmazásban is közölje!
- A feladatok megoldását tollal készítse! Ha valamilyen megoldást vagy megoldásrészletet áthúz, akkor az nem értékelhető!
- Az egyes feladatokra az ott feltüntetett pontszámnál több nem kapható.
- Ha a megadott válasz hibás elemet vagy elemeket tartalmaz, akkor maximális pontszám nem adható.

I. rész

1. Adott két egyenes egyenlete: e: $3x - y = 2$ és f: $x + 3y = -6$.

a) Határozza meg az egyenesek metszéspontjának koordinátáit!

2 pont		

b) Számítsa ki a két egyenes hajlásszögét!

5 pont		

c) Mekkora távolságra van az origó az e egyenestől?

4 pont		

Megoldás:

2. Tekintse az alábbi táblázatot!

Korcsoport	A nők száma (ezer főben)	Ezer nőre jutó szülések száma	A nők száma (ezer főben)	Ezer nőre jutó szülések száma
	1930	1930	1995	1995
15 – 19	253	40,9	417	33,6
20 – 24	217	158,5	372	113,9
25 – 29	181	151,8	331	110,3
30 – 34	173	110,7	305	50,2
35 – 39	194	74,8	382	17,2
40 – 44	205	15,7	418	2

A táblázat adatainak értelmezésekor tekintsünk el az ikerszülésektől, illetve attól, hogy egy nő kétszer is szülhet egy évben.

a) Hány gyerek született összesen 1930-ban és hány született 1995-ben?

4 pont		

b) Hány százalékkal változott a szülések száma 1930 és 1995 között 1930-hoz képest?

2 pont		

c) Hány százalékkal változott az ezer nőre jutó szülések száma 1930 és 1995 között 1930-hoz képest?

4 pont		

d) Egy 1995 szilveszterén készült tv-interjúhoz véletlenszerűen választottak ki egy riportalanyt a 20–24 év közötti női lakosok közül. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott nő szült abban az évben? Válaszát indokolja!

3 pont		

Megoldás:

3. Egy mértani sorozat első három tagjának az összege 114. Ha a harmadik számot 72-vel csökkentjük, egy számtani sorozat első három tagjához jutunk. Határozza meg a mértani sorozatot!

13 pont		

Megoldás:

4. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számpárok halmazán!

$$16x^2 - (8\cos y)x + 1 = 0$$

14 pont		

Megoldás:

II. rész

Az 5. – 9. feladatok közül tetszés szerint választott négyet kell megoldania.

5. **a)** Igazolja, hogy az $n^3 - n$ kifejezés osztható hattal, ha n természetes szám!

5 pont		

b) Melyek azok a k egész számok, amelyekre a $k^2 - 3k$ kifejezés egy prímszám négyzetével egyenlő?

11 pont		

Megoldás:

6. **a)** Legalább hány tanuló jár abba az iskolába, ahol a tanulók megkérdezése nélkül is biztosan tudjuk, hogy van három olyan diák, aki ugyanazon a napon ünnepli a születésnapját?

4 pont		

Az iskolában 3 különböző szakkör működik: dráma, fotó, népi tánc. Egy 22 fős osztály minden tanulója legalább az egyik szakkörön részt vesz. Az osztályfőnök számítógépes nyilvántartást vezet a tanulókról, amelyben egy számhármassal jellemzi azt, hogy ki melyik szakkörre jár. Az első szám a dráma, a második a fotó, a harmadik a népi táncra vonatkozik. Egyes jelzi, ha valaki részt vesz a szakkör munkájában, nulla, ha nem. Pl. ha egy diák a drámaszakkörre jár, a fotóra nem és a néptáncra igen, az azt jelenti, hogy az ő kódszáma:

1	0	1

b) Hány különböző számhármas szerepelhet a tanár nyilvántartásában?

3 pont		

c) Mutassa meg, hogy van legalább 4 olyan tanuló, aki pontosan ugyanazokat a szakköröket látogatja!

6 pont		

d) A 22 tanulóból pontosan két szakkört látogat 16 tanuló, és van 3 olyan, aki mindegyikre jár. Hány tanuló jár pontosan egy szakkörre?

3 pont		

Megoldás:

7. Egy négyoldalú gúla alaplapja rombusz. A gúla csúcsa a rombusz középpontja felett van, attól 82 cm távolságra. A rombusz oldalának hossza 54 cm, hegyesszöge 43°36'.

a) Számítsa ki a gúla térfogatát!

2 pont		

b) Mekkorák a gúla oldalélei?

8 pont		

c) Mekkora a gúla felszíne?

6 pont		

Megoldás:

8. Egy vállalat a nyolc gyáregysége között zártláncú kamerarendszert épít ki úgy, hogy bármely két egység között legyen kapcsolat. Biztonsági okokból olyan terv készült, hogy bármely két kábel meghibásodása esetén még összefüggő maradjon a rendszer, viszont ha egy harmadik kábel is meghibásodik, akkor már nem feltétlenül marad összefüggő a rendszer.

a) Mutassa meg, hogy a fenti feltételek mellett minden gyáregységből legalább három kábel kell, hogy kiinduljon!

2 pont		

b) Legalább hány kábel-összeköttetést kell kiépíteni?

3 pont		

c) Szemléltesse a rendszert egy olyan gráf felrajzolásával, amelyben az élek száma minimális!

3 pont		

A megfigyelések szerint az egyik gyáregységben gyártott termékek átlagosan 4%-a hibás. A megrendelő csak akkor veszi át a megrendelt árumennyiséget, ha 50 véletlenszerűen kiválasztott termékben legfeljebb 2 hibásat talál.

d) Mennyi a valószínűsége, hogy az árut átveszik?

8 pont		

Megoldás:

9. Az $x^3 + 2x^2 + cx + y + d = 0$ egyenletű grafikonról tudjuk, hogy az origóban érinti az x tengelyt.

a) Határozza meg a c és d valós paraméterek értékét!

4 pont		

b) Határozza meg a $x \mapsto -x^3 - 2x^2 \ (R \to R)$ függvény menetét és szélsőértékeit!

9 pont		

c) A zérushelyek megállapítása után ábrázolja a fenti függvényt!

3 pont		

Megoldás: