JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ A MATEMATIKA EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI 2. FELADATSORHOZ

Formai előírások:

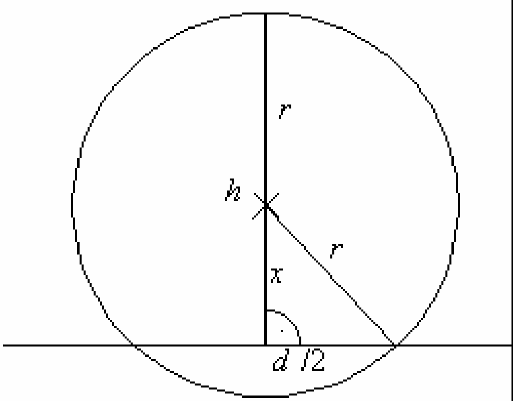
- A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől eltérő színű tollal kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
- A feladatok mellett található téglalapok közül az elsőben a feladatra adható pontszám van, a javító által adott pontszám a mellette levő téglalapba kerül.
- Kifogástalan megoldás esetén elég a megfelelő maximális pontszám beírása a téglalapokba.
- Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes *részpontszámokat* is írja rá a dolgozatra.

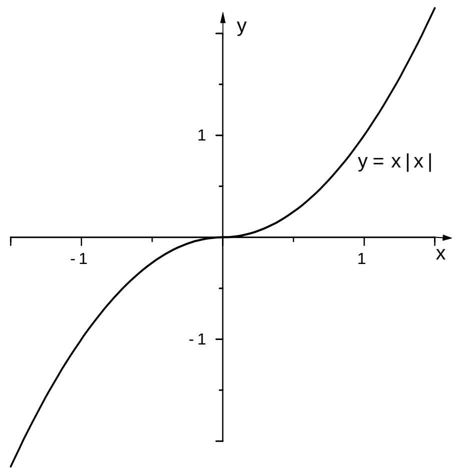
Tartalmi kérések:

- Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól *eltérő megoldás* születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit és ennek alapján pontozzon.
- A pontozási útmutató pontjai tovább *bonthatók*. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
- Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél *kevésbé részletezett.*
- Ha a megoldásban *számolási hiba*, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
- *Elvi hiba* esetén, egy gondolati egységen belül a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban az elhibázott részt egy újabb részkérdés követi, és a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot.
- Egy feladatra adott megoldások közül csak egy (a magasabb pontszámú) értékelhető.
- A megoldásokért jutalompont (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) nem adható.
- Az olyan részszámításokért, részlépésekért nem jár pontlevonás, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
- Ha a pontozási útmutató a feladat ellenőrzéséért pontot ad, akkor az csak abban az esetben adható meg, ha a vizsgázó valamilyen formában írásban rögzíti az ellenőrzés tényét. (Itt minden elvileg helyes módszer elfogadható.)
- A feladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, melynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani, csak a többi feladatot. Ha ezen előírások alapján a javító számára *nem derül ki egyértelműen,* hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a *nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó* feladat lesz.

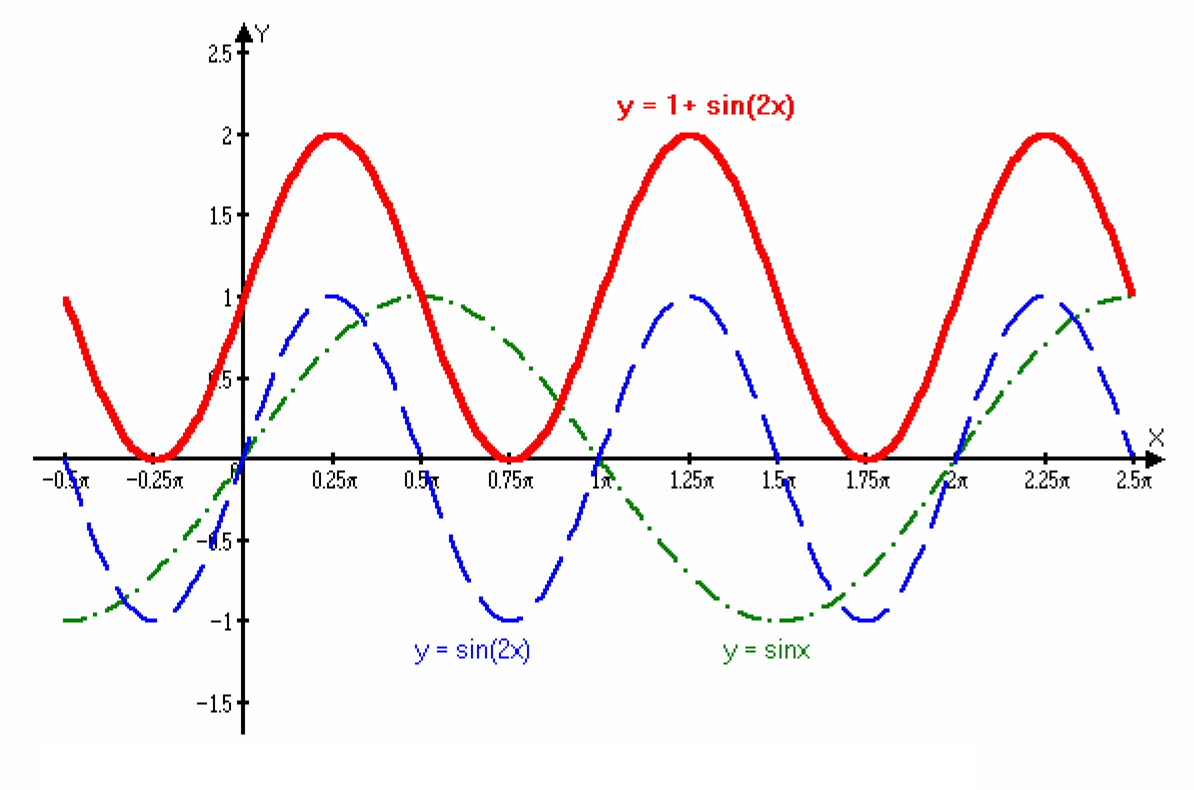
I.

1.		
$4^{3/2} \cdot 4^x - 14 \cdot 2^2 \cdot 2^x + 96 = 0$	2 pont	
$8 \cdot 4^x - 56 \cdot 2^x + 96 = 0$	2 pont	*A hatványozás azonosságainak alkalmazásáért.*
$2^{2x} - 7 \cdot 2^x + 12 = 0$	1 pont	*Másodfokú egyenlet rendezett alakjához való eljutásért.*
$2^x = 4$ vagy $2^x = 3$	2 pont	*A másodfokú egyenlet megoldásáért.*
$x_1 = 2$	1 pont	*Az egyik gyökért.*
$x_2 = \log_2 3 \approx 1{,}585$	1 pont	*A másik gyökért (közelítő érték nélkül is).*
A kapott gyökök kielégítik az egyenletet, mivel ekvivalens átalakításokat hajtottunk végre.	1 pont	*Az ellenőrzésért, ill. annak megállapításáért, hogy a kapott gyökök valóban megoldások. Ha csak egy gyököt talált meg, de azt ellenőrzi, akkor is jár a pont.*
Az x_1 eleme az adott intervallumnak, ez tehát megoldás.	1 pont	
Az x_2 nem eleme az intervallumnak.	1 pont	
Összesen:	**12 pont**	

2.		
	3 pont	*A síkmetszet ábráján szerepelnie kell az ismert (r; h) és ismeretlen (d; x) szakaszoknak, a derékszögű háromszögnek.*
$h = 4{,}8$ cm = 48 mm $D = 2r = 56$ mm	1 pont	*Átváltásért.*
$r = D/2 = 28$	1 pont	*A sugár kiszámításáért.*
$x = h - r = 20$	2 pont	*A befogó kiszámításáért.*
$(d/2)^2 = r^2 - x^2$	2 pont	*Pitagorasz-tétel felírásáért.*
$(d/2)^2 = 28^2 - 20^2$	1 pont	*Behelyettesítésért.*
$d/2 = 19{,}596$	1 pont	
$d = 39{,}19 \approx 39{,}2$		
A lyuk átmérője 39,2 mm.	1 pont	*Mértékegységgel ellátott eredményért.*
Összesen:	**12 pont**	

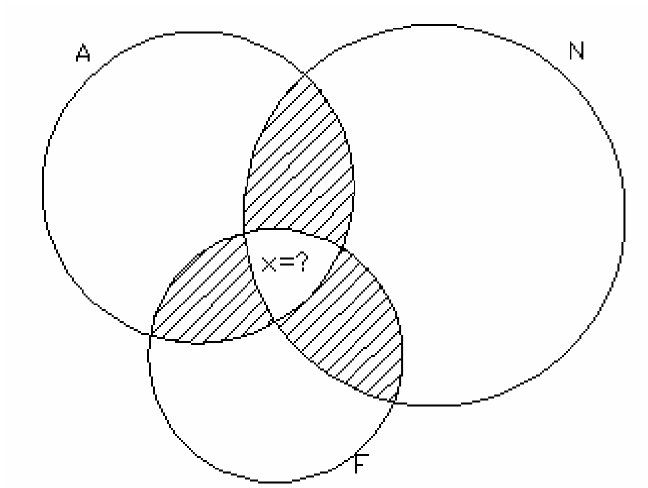
3.		
a)		
		
$y = x \cdot \lvert x \rvert = x^2$, ha $x \geq 0$	1 pont	
$y = x \cdot \lvert x \rvert = -x^2$, ha $x < 0$	1 pont	
A grafikon	1 pont	*A grafikon megrajzolásáért összesen 3 pont jár, az átalakítás leírása nélkül is.*
Az értékkészlet: **R.**	1 pont	*Az értékkészlet helyes megállapításáért.*
A függvény az értelmezési tartományon szigorúan monoton nő.	1 pont	*A monotonitás helyes leírásáért.*
Szélsőértéke nincs.	1 pont	*A szélsőérték vizsgálatáért.*
Összesen:	**6 pont**	

b)



$y = \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x$ $y = \sin 2x + 1$	2 pont	*A trigonometrikus átalakításért.*
Grafikon:	2 pont	*A grafikon helyes felrajzolásáért. Akármilyen módon jut a helyes grafikonhoz, összesen 4 pont.*
Az értékkészlet: [0;2]	1 pont	*Az értékkészlet helyes megállapításáért.*
A függvény szigorúan monoton nő: $[-\pi/4 + k\pi ; \pi/4 + k\pi]$, $k \in Z$ szigorúan monoton csökken: $[\pi/4 + k\pi ; 3/4\pi + k\pi]$	1 pont	*A monotonitás helyes leírásáért.*
A fv. max. helyei: $x = \pi/4 + k\pi$, minimumhelyei: $x = 3/4\pi + k\pi$	1 pont	*A szélsőértékek helyéért.*
A minimum értéke 0, a maximumé 2.	1 pont	*A szélsőértékek értékéért.*
Összesen:	**8 pont**	

4.



1. megoldás:		
$\|A\| = 14$; $\|N\| = 15$; $\|F\| = 11$ |pontosan két nyelvet tanulók| = 6	5 pont	*A feladat adatainak helyes elképzeléséért (pl. Venn-diagramon feltüntetett számok).*
Ha a mindhárom nyelvet tanuló diákok száma x, akkor: |A| + |N| + |F| – |pontosan két nyelvet tanulók| – 2x = 30	5 pont	*A kérdezett számosság meghatározásához alkalmas összefüggés felírásáért (nem feltétlenül egyenlettel).*
$14 + 15 + 11 - 6 - 2x = 30$	1 pont	*Helyes numerikus egyenlet.*
$x = 2$	1 pont	*Helyes numerikus eredményért.*
tehát 2 diák tanulja mindhárom nyelvet.	1 pont	*Helyes szöveges válaszért.*
Összesen:	**13 pont**	

2. megoldás:		
30 diák mindegyike részt vesz egy nyelvórán, ez 30 óra. 6-an két nyelvet is tanulnak, ez +6 óra, azaz eddig 36 nyelvóra (a diákok óráit számolva).	2 pont 3 pont	
Összesen 40 nyelvóra van, hiányzik tehát még 4 óra, ami abból adódik, hogy vannak, akik 3 órán is részt vesznek. Nyilván 2 ember esetén adódik +4 óra, ha a mindegyikük még 2-2 órán jelen van.	3 pont 2 pont 2 pont	
Tehát 2 tanuló tanul 3 nyelvet.	1 pont	
Összesen:	**13 pont**	

Megjegyzés: *Szisztematikus próbálgatással, kísérletezéssel nyert helyes eredményért, ha azt ellenőrzi is, de nem bizonyítja, hogy más megoldás nem lehetséges, 8 pont adható.*

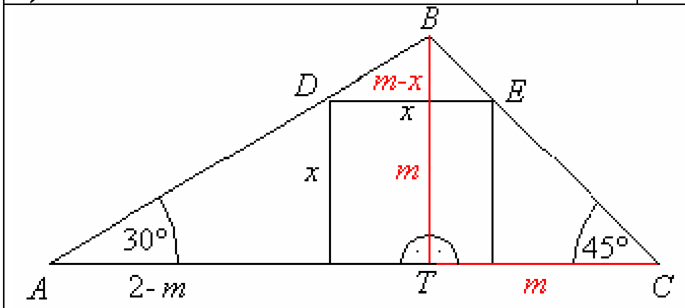
II.

Az alábbi öt feladat (5. – 9.) közül a tanulónak tetszés szerint választott *négyet* kellett megoldani és négyet kell értékelni!

5.		
a) A futónövény havi növekedésének hosszúságai mértani sorozatot alkotnak,	1 pont	
amelynek első tagja $a_1 = 100$,	1 pont	
a hányadosa $q = 4/5 = 0{,}8$.	1 pont	*A mértani sorozat felismeréséért, az a_1 és a q meghatározásáért 3 pont jár*
A 21. havi növekedés a mértani sorozat 21. tagja:		
$a_{21} = a_1 \cdot q^{20} = 100 \cdot 0{,}8^{20} = 1{,}15$	1 pont	
A 21. hónapban 1,15 cm-t fog nőni	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	
b) A növekedések összege túl kell, hogy lépje a 400 cm-t.	1 pont	
$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$ $S_n = 100 \cdot \frac{0{,}8^n - 1}{0{,}8 - 1} \geq 400$	1 pont	
$\frac{1 - 0{,}8^n}{0{,}2} \geq 4$	1 pont	
Rendezve: $0{,}8^n \leq 0{,}2$	1 pont	
$n \geq \log_{0{,}8} 0{,}2$	1 pont	

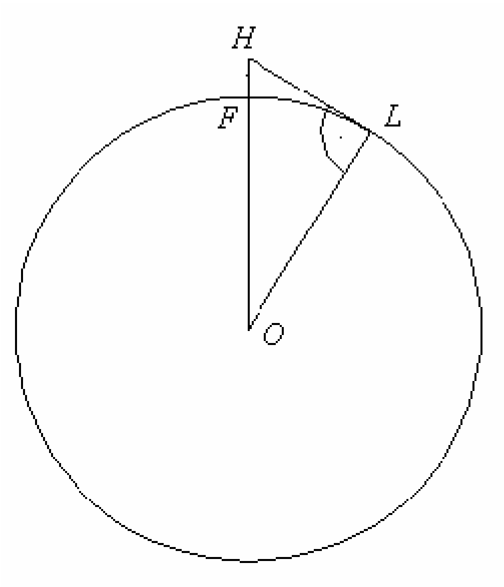
$n \geq \dfrac{\lg 0{,}2}{\lg 0{,}8} \approx 7{,}21$	1 pont	
Tehát a 8. hónapban éri el a 400 cm-es hosszt.	1 pont	*Az n meghatározásáért 4 pont jár.*
Összesen:	**7 pont**	
c) Az előző ponthoz hasonlóan:		
$S_n = a_1 \cdot \dfrac{q^n - 1}{q - 1} = 100 \cdot \dfrac{0{,}8^n - 1}{0{,}8 - 1} \geq 600$	2 pont	
Rendezve: $0{,}8^n \leq -0{,}2$	1 pont	
Ez viszont nem lehetséges, azaz a 600 cm-es hosszúságot már nem éri el a növény.	1 pont	*Az ellentmondás felismeréséért 4 pont jár.*
Összesen:	**4 pont**	

<table>
<tr><td>6.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>a)
<table>
<tr><td></td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td></tr>
<tr><td></td><td>21</td><td>26</td><td>28</td><td>17</td><td>7</td><td>1</td><td>0</td></tr>
</table></td><td>3 pont</td><td>Ezt a 3 pontot bontani kell, ha van hibás válasz is. Az adható pontszám: a jó válaszok felének egészrésze.</td></tr>
<tr><td>Összesen:</td><td>3 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>b)
Számtani közép:
$\dfrac{1\cdot 21 + 2\cdot 26 + 3\cdot 28 + 4\cdot 17 + 5\cdot 7 + 6\cdot 1 + 7\cdot 0}{100}$</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Értéke: 2,66</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Medián: 3,
hiszen az 50. és az 51. család is 3 gyermekes a gyermekszám szerinti sorba rendezéskor.</td><td>2 pont</td><td>Indoklás nélkül is elfogadható.</td></tr>
<tr><td>Módusz: 3,
mert ez a leggyakoribb érték.</td><td>2 pont</td><td>Indoklás nélkül is elfogadható.</td></tr>
<tr><td>Összesen:</td><td>6 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>92 családban van legfeljebb 4 gyermek.</td><td>2 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>A jó esetben közülük kell kiválasztani kettőt:
$\binom{92}{2}$</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Az összes esetben 100 családból kell kiválasztani kettőt: $\binom{100}{2}$.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>A keresett esély e kettő hányadosa:
$\dfrac{\binom{92}{2}}{\binom{100}{2}} = \dfrac{92\cdot 91}{100\cdot 99} = 0{,}8457$</td><td>2 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Tehát erre az esély kb. 84,6%.</td><td>1 pont</td><td></td></tr>
<tr><td>Összesen:</td><td>7 pont</td><td></td></tr>
</table>

7.		
a)		
		
Rajz	3 pont	*A geometriai modell helyes elképzeléséért.*
ABT derékszögű háromszögben:		
$tg30° = \dfrac{m}{2-m}$	1 pont	
$\dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{m}{2-m}$	1 pont	
$m = \sqrt{3} - 1 \approx 0{,}73$	1 pont	*A magasság meghatározásáért 3 pont adható.*
Két hasonló háromszögből (*ABC* és *DBE*):		
$\dfrac{m-x}{x} = \dfrac{m}{AC}$	1 pont	
$\dfrac{0{,}73-x}{x} = \dfrac{0{,}73}{2}$	1 pont	
$x = 4 - 2\sqrt{3} \approx 0{,}54$	1 pont	
A négyzet oldala 0,54 méter.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	
b)		
Az *AB* oldalegyenes irányszöge 30°, tehát meredeksége $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.	1 pont	
Az *A* pont segítségével felírva az egyenes egyenletét: $y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x + \dfrac{6-2\sqrt{3}}{3}$ $(y = 0{,}58x + 0{,}85)$	1 pont	
A *BC* oldalegyenes irányszöge 135°, így meredeksége –1.	1 pont	
A *C* pont segítségével felírva az egyenlete: $y = -x + 6$	1 pont	
A két egyenes metszéspontja adja a *B* csúcs koordinátáit: $B\left(5-\sqrt{3};\, 1+\sqrt{3}\right)$ *B* (3,27; 2,73)	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

8.		
a)		
$n^{12}-n^8-n^4+1 = n^8\left(n^4-1\right)-\left(n^4-1\right)=$	1 pont	*Kiemelés*
$=\left(n^4-1\right)\cdot\left(n^8-1\right)=$	1 pont	*Szorzattá alakítás*
$=\left(n^4-1\right)\cdot\left(n^4-1\right)\cdot\left(n^4+1\right)=$	1 pont	*Egyik tényező szorzattá alakítása*
$\left((n-1)\cdot(n+1)\cdot\left(n^2+1\right)\right)^2\cdot\left(n^4+1\right)=$	1 pont	*Másik tényező szorzattá alakítása*
$=(n-1)^2\cdot(n+1)^2\cdot\left(n^2+1\right)^2\cdot\left(n^4+1\right)$	1 pont	
Összesen:	**5 pont**	
b)		
$512 = 2^9$		
$n^{12}-n^8-n^4+1=$ $=(n-1)^2\cdot(n+1)^2\cdot\left(n^2+1\right)^2\cdot\left(n^4+1\right)$		
Mivel *n* páratlan, ezért minden tényező páros,	1 pont	
így a szorzat biztosan osztható 2^7-nel.	1 pont	
Az $n-1$ és az $n+1$ szomszédos páros számok, tehát az egyik 4-gyel is osztható.	1 pont	
Tehát a szorzat összességében osztható 2^9-nel.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	
c)		
A $7\cdot 73=511$ téglalap felbontható 511 négyzetre.	2 pont	
Az 512 pontot csak úgy lehet elhelyezni 511 négyzetben, hogy legalább egy négyzetben van 2 pont.	2 pont	
Egy négyzetben két pont között a legnagyobb távolság az átló: $a\cdot\sqrt{2}\approx 1{,}414$.	1 pont	
Ha $a=1$, akkor két pont távolsága biztosan kisebb, mint 1,42.	1 pont	
Ekkor annak a két pontnak a távolsága, amelyik egy négyzetbe esik kisebb mint 1,42, így már 1,5.nél is kisebb.	1 pont	
Összesen:	**7 pont**	

9.



a)

Rajz	3 pont	*A feladat helyes értelmezéséért*
Az eltűnés pillanatában a hajó csúcsát (*H*) a megfigyelővel összekötő egyenes a földgömb érintője, az érintési pont *L*. A Föld középpontját jelöljük *O*-val .		
OLH háromszög derékszögű, melynek egyik befogója *r*, átfogója pedig *r* + 24. Az *LH* befogó Pitagorasz-tétellel kiszámolva: $LH = \sqrt{(r+24)^2 - r^2} = \sqrt{6378324^2 - 6378\ 300^2}$	1 pont	
LH = 17 497	1 pont	*Az LH érték meghatározásáért 2 pont jár*.
Tekintettel arra, hogy a *HOL* szög igen kicsi, az *LH* távolság jó közelítéssel megegyezik az LF ívhosszal, a megtett út tehát kb. 17,5 km. (Ennél pontosabb eredményt nincs értelme adni, hiszen a hullámokat, a légköri viszonyokat, a Föld nem tökéletes gömb voltát nem vettük figyelembe.)	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	
b) *1. megoldás:*		
Egy óra alatt elfogy $y = 1{,}4 + 0{,}005v^2$ tonna üzemanyag.		
t óra alatt: *M* tonna fogy el, ezért $t = \frac{M}{y} = \frac{M}{1{,}4 + 0{,}005 \cdot v^2}$	1 pont	

$s = v \cdot t$, ezért a hajó által megtett út: $$s = \frac{M \cdot v}{1{,}4 + 0{,}005 \cdot v^2}$$	1 pont	
Azt kell tudni, hogy ez az út mekkora v esetén lesz a legnagyobb, tehát a függvény maximumát keressük**.**	1 pont	
A tört értéke akkor a legnagyobb, ha a nevező a legkisebb, hiszen a számláló konstans.	1 pont	
A kifejezést átalakítva: $$s = \frac{M}{\frac{1{,}4}{v} + 0{,}005v}$$	1 pont	
A nevező a középértékek közötti nevezetes egyenlőtlenség alapján: $$\frac{\frac{1{,}4}{v} + 0{,}005v}{2} \geq \sqrt{\frac{1{,}4}{v} \cdot 0{,}005v}$$	2 pont	
Akkor áll fenn az egyenlőség, ha a jobboldal állandó, ekkor a tört értéke minimális: $$\frac{1{,}4}{v} = 0{,}005v$$	1 pont	
Ahonnan: $$v^2 = \frac{1{,}4}{0{,}005} = 280$$ $$v = 16{,}73$$	1 pont	
Tehát a hajó sebessége 16,73 mérföld/óra.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	
<u>2. megoldás:</u> Egy óra alatt elfogy $y = 1{,}4 + 0{,}005v^2$ tonna üzemanyag.		
t óra alatt: M tonna fogy el, ezért $$t = \frac{M}{y} = \frac{M}{1{,}4 + 0{,}005 \cdot v^2}$$	1 pont	
$s = v \cdot t$, ezért a hajó által megtett út: $$s = \frac{M \cdot v}{1{,}4 + 0{,}005 \cdot v^2}$$	1 pont	
Azt kell tudni, hogy ez az út mekkora v esetén lesz a legnagyobb, tehát a függvény maximumát keressük.	1 pont	
A szélsőérték meghatározásához deriváljuk a függvényt: $$s' = \frac{M\left(1{,}4 + 0{,}005v^2\right) - Mv \cdot 0{,}01v}{\left(1{,}4 + 0{,}005v^2\right)^2}$$	3 pont	

Rendezve: $$s' = M \cdot \frac{1{,}4 - 0{,}005v^2}{\left(1{,}4 + 0{,}005v^2\right)^2}$$	1 pont	
Szélsőérték ott lehet, ahol a derivált nulla: $1{,}4 - 0{,}005v^2 = 0$	1 pont	
$v^2 = 280$		
$v = 16{,}73$ (mérföld/óra)	1 pont	
Ezen a helyen az eredeti függvénynek maximuma van, ha a derivált pozitívból negatívba vált előjelet. Ez teljesül, mert a deriváltban a nevező pozitív, a számláló pedig a változó pozitív értékeinél szigorúan monoton csökken.	1 pont	
Összesen:	**10 pont**	