JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ A MATEMATIKA EMELT SZINTŰ ÍRÁSBELI 1. FELADATSORHOZ

Formai előírások:

- A dolgozatot a vizsgázó által használt színűtől eltérő színű tollal kell javítani, és a tanári gyakorlatnak megfelelően jelölni a hibákat, hiányokat stb.
- A feladatok mellett található téglalapok közül az elsőben a feladatra adható pontszám van, a javító által adott pontszám a mellette levő téglalapba kerül.
- Kifogástalan megoldás esetén elég a megfelelő maximális pontszám beírása a téglalapokba.
- Hiányos/hibás megoldás esetén kérjük, hogy az egyes *részpontszámokat* is írja rá a dolgozatra.

Tartalmi kérések:

- Egyes feladatoknál több megoldás pontozását is megadtuk. Amennyiben azoktól *eltérő megoldás* születik, keresse meg ezen megoldásoknak az útmutató egyes részleteivel egyenértékű részeit és ennek alapján pontozzon.
- A pontozási útmutató pontjai tovább *bonthatók*. Az adható pontszámok azonban csak egész pontok lehetnek.
- Nyilvánvalóan helyes gondolatmenet és végeredmény esetén maximális pontszám adható akkor is, ha a leírás az útmutatóban szereplőnél *kevésbé részletezett.*
- Ha a megoldásban *számolási hiba*, pontatlanság van, akkor csak arra a részre nem jár pont, ahol a tanuló a hibát elkövette. Ha a hibás részeredménnyel helyes gondolatmenet alapján tovább dolgozik, akkor a következő részpontszámokat meg kell adni.
- *Elvi hiba* esetén, egy gondolati egységen belül a formálisan helyes matematikai lépésekre sem jár pont. Ha azonban az elhibázott részt egy újabb részkérdés követi, és a tanuló az elvi hibával kapott rossz eredménnyel mint kiinduló adattal helyesen számol tovább, akkor erre a részre kapja meg a maximális pontot.
- Egy feladatra adott megoldások közül csak egy (a magasabb pontszámú) értékelhető.
- A megoldásokért jutalompont (az adott feladatra vagy feladatrészre előírt maximális pontszámot meghaladó pont) nem adható.
- Az olyan részszámításokért, részlépésekért nem jár pontlevonás, melyek hibásak, de amelyeket a feladat megoldásához a vizsgázó ténylegesen nem használ fel.
- Ha a pontozási útmutató a feladat ellenőrzéséért pontot ad, akkor az csak abban az esetben adható meg, ha a vizsgázó valamilyen formában írásban rögzíti az ellenőrzés tényét. (Itt minden elvileg helyes módszer elfogadható.)
- A feladatsor II. részében kitűzött 5 feladat közül csak 4 feladat megoldása értékelhető. A vizsgázó az erre a célra szolgáló négyzetben megjelölte annak a feladatnak a sorszámát, melynek értékelése nem fog beszámítani az összpontszámába. Ennek megfelelően a megjelölt feladatra esetlegesen adott megoldást nem is kell javítani, csak a többi feladatot. Ha ezen előírások alapján a javító számára *nem derül ki egyértelműen*, hogy a vizsgázó melyik feladat értékelését nem kéri, akkor a *nem értékelendő feladat automatikusan a kitűzött sorrend szerinti legutolsó* feladat lesz.

I.

1.		
a)		
Az egyenesek metszéspontját az egyenlet-rendszer megoldása adja meg.		
$y = 3x - 2$		
$x + 3\cdot(3x-2) = -6$		
$x = 0$ $y = -2$		
M (0; –2)	2 pont	*Bármilyen rendezéssel eljuthat az x és y értékéig. Pontos rajz és annak leolvasása esetén 1 pont adható.*
Összesen:	**2 pont**	
b)		
A két egyenes szögét a normálvektoraik szöge is megadja, amit a skaláris szorzat segítségével számolhatunk ki.		
$\underline{n}_e\ (3; -1)$	1 pont	
$\underline{n}_f\ (1; 3)$	1 pont	
$\lvert\underline{n}_e\rvert = \sqrt{3^2+(-1)^2} = \sqrt{10}$		
$\lvert\underline{n}_f\rvert = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$	1 pont	*A vektorok hosszának meghatározásáért.*
$3 - 3 = \sqrt{10}\cdot\sqrt{10}\cdot\cos\alpha$	1 pont	*A skalárszorzat kétféle felírásáért.*
$\cos\alpha = 0$		
$\alpha = 90°$	1 pont	*Ha a normálvektorok vagy az irányvektorok skaláris szorzatából vagy a meredekségekből veszi észre, hogy a két egyenes egymásra merőleges, természetesen akkor is jár az 5 pont. Ha a pontos rajzról olvassa le a szöget, akkor 1 pont jár.*
Összesen:	**5 pont**	
c)		
Az origón átmenő *e* egyenesre merőleges egyenes egyenlete: $x + 3y = 0$.	1 pont	
Ennek metszéspontja az e egyenessel: $T\left(\frac{3}{5}; -\frac{1}{5}\right)$.	2 pont	
Ennek távolsága az origótól: $\frac{\sqrt{10}}{5} \approx 0{,}63$.	1 pont	*A pontos vagy a közelítő érték is 1 pontot ér.*
Összesen:	**4 pont**	*Ha a pont–egyenes távolságképletével vagy más módon számol, akkor is jár a 4 pont.*

2.		
a)		
Súlyozott számtani átlaggal kell számolni.		
1930:		
$253 \cdot 40{,}9 + 217 \cdot 158{,}5 + 181 \cdot 151{,}8 + 173 \cdot 110{,}7 +$ $+ 194 \cdot 74{,}8 + 205 \cdot 15{,}7 = 109\,098{,}8$	1 pont	
Tehát 1930-ban 109 099 gyerek született.	1 pont	
1995:		*Ha a számolásban korábban kerekít, és ezzel az értékkel jól számol, akkor is jár a 4 pont.*
$417 \cdot 33{,}6 + 372 \cdot 113{,}9 + 331 \cdot 110{,}3 + 305 \cdot 50{,}2 +$ $+ 382 \cdot 17{,}2 + 418 \cdot 2 = 115\,608{,}7$	1 pont	
Tehát 1995-ban 115 609 gyerek született.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	
b)		
A születések számának változása:		
$\frac{115609 - 109099}{109099} \cdot 100 \approx 6$	1 pont	
Tehát 6%-os a növekedés.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	
c) Az 1000 nőre jutó szülések számának változása: 1930-ban a nők száma összesen 1223 ezer, tehát 1000 nőre		
$\frac{109098{,}8}{1223} = 89{,}2$ szülés jutott.	1 pont	
1995-ben a nők száma összesen 2225 ezer, tehát 1000 nőre		
$\frac{115609}{2225} = 52{,}0$ szülés jutott.	1 pont	
A második adat az elsőnek $100 \cdot \frac{52{,}0}{89{,}2} = 58{,}3\%$-a.	1 pont	
Tehát 41,7%-os a csökkenés.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	
d)		
1995-ben az adott korosztályba (20–24) tartozó nőknek 113,9 ezreléke szült gyereket.	1 pont	
Ez 11,39%-os valószínűséget jelent.	2 pont	
Összesen:	**3 pont**	

3.		
A mértani sorozat három szomszédos tagja: $\frac{a}{q}$; a; aq.	1 pont	
Ezek összege: (1) $\frac{a}{q}+a+aq=114.$	1 pont	
A számtani sorozat három szomszédos tagja: $\frac{a}{q}$; a; $aq-72$.	1 pont	
A középső a két szomszédos számtani közepe: $a=\frac{\frac{a}{q}+aq-72}{2}$.	2 pont	
Ebből: (2) $\frac{a}{q}+aq=2a+72$.		
Ezt behelyettesítve az (1)-be: $2a+72+a=114$.		
$a = 14$	3 pont	
Visszahelyettesítve (2)-be: $\frac{14}{q}+14q=100$.		
A másodfokú egyenlet: $14q^2 - 100q + 14 = 0$.	1 pont	
Az egyenlet gyökei: $q_1 = 7$ és	1 pont	
$q_2 = \frac{1}{7}$	1 pont	
A mértani sorozat tagjai: 2; 14; 98	1 pont	
vagy 98; 14; 2.	1 pont	
Összesen:	**13 pont**	

4.		
1. megoldás		
A másodfokú egyenletnek akkor és csak akkor van megoldása, ha a diszkrimináns nemnegatív:		
$64\cos^2 y - 64 \geq 0$	2 pont	
$\cos^2 y \geq 1$	1 pont	
Ez csak akkor teljesülhet, ha $\cos y = \pm 1$.	2 pont	*Ha csak az egyiket írja, akkor 1 pont jár.* *A cos y lehetséges értékeinek a meghatározása összesen 5 pont.*

Ha $\cos y = 1$, akkor $y = 2k\pi$,	1 pont	
ahol $k \in Z$.	1 pont	
Visszahelyettesítve az egyenletbe: $16x^2 - 8x + 1 = 0$.	1 pont	
Ennek gyöke: $x = \frac{1}{4}$.	1 pont	
Az egyik megoldás: $\left(\frac{1}{4};\ 2k\pi\right)$,		*Az egyik gyöksorozat felírása összesen 4 pont.*
ahol $k \in Z$.		
Ha $\cos y = -1$, akkor $y = \pi + 2k\pi$,	1 pont	
ahol $k \in Z$.	1 pont	
Visszahelyettesítve az egyenletbe: $16x^2 + 8x + 1 = 0$.	1 pont	
Ennek gyöke: $x = -\frac{1}{4}$.	1 pont	
A másik megoldás: $\left(-\frac{1}{4};\ \pi + 2k\pi\right)$,		*A másik gyöksorozat felírása összesen 4 pont.*
ahol $k \in Z$.		
Ellenőrzés: - ekvivalens átalakításokat hajtottunk végre, tehát a kapott gyökök kielégítik az egyenletet; - behelyettesítéssel.	1 pont	Ha csak az egyik gyöksorozatot találja meg és azt ellenőrzi, akkor is kapja meg az 1 pontot.
<u>*2. megoldás*</u>		
A megoldóképletet alkalmazva:		
$x = \frac{8\cos y \pm \sqrt{64\cos^2 y - 64}}{32}$	*1 pont*	
$x = \frac{\cos y \pm \sqrt{-\sin^2 y}}{4}$	*1 pont*	
Ez akkor értelmezhető, ha $\sin y = 0$.	*1 pont*	
Ekkor $\cos y = \pm 1$.	*2 pont*	Ha csak az egyiket írja, akkor 1 pont jár.
Innen lásd. az *1. megoldást*.		
Összesen:	**14 pont**	

II.

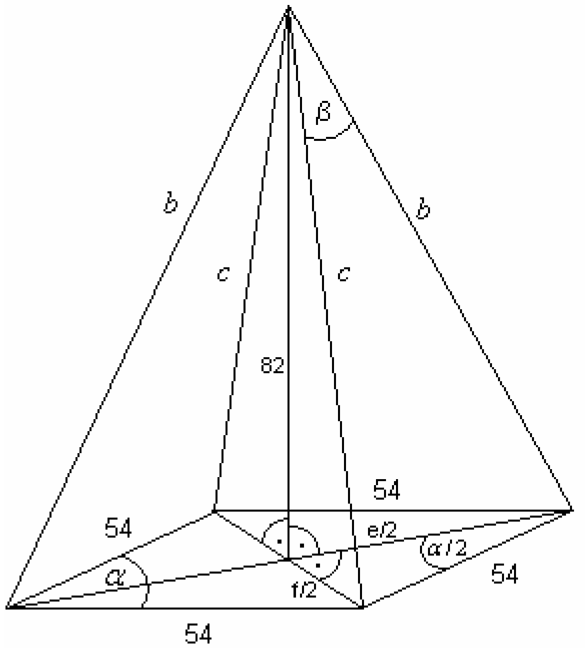
Az alábbi öt feladat (5. – 9.) közül a tanulónak tetszés szerint választott *négyet* kellett megoldani és négyet kell értékelni!

5.		
a)		
$n^3 - n = n(n^2 - 1) =$	1 pont	
$= n(n+1)(n-1)$	1 pont	
Három szomszédos szám közül az egyik biztosan páros, ezért osztható 2-vel, és	1 pont	
van közöttük biztosan hárommal osztható is,	1 pont	
ezért a szorzatuk osztható 6-tal.	1 pont	
Összesen	**5 pont**	
b)		
1. megoldás		
A feltétel szerint		
$k^2 - 3k = p^2$, ahol p prímszám.		
A fenti egyenlet		
$k \cdot (k - 3) = p^2$ alakban írható fel.	1 pont	
A jobboldal négyféle szorzatként állítható elő: (1) $1 \cdot p^2$,	1 pont	
(2) $p \cdot p$,	1 pont	
(3) $(-p) \cdot (-p)$,	1 pont	
(4) $(-1) \cdot (-p^2)$.	1 pont	*Az esetek szétválasztásáért összesen 4 pont jár.*
(1)		
Ha a $k = 1$ *és* $k - 3 = p^2$, akkor $p^2 = -2$, ami nem lehet.	1 pont	
Ha $k - 3 = 1$, *és* $k = p^2$, akkor $k = 4$, tehát $p^2 = 4$, azaz $p = 2$.	1 pont	*Az (1) eset vizsgálatáért összesen 2 pont jár.*
(2) és (3)		
$k = k - 3$, ami nem lehetséges.	1 pont	*A (2) és (3) eset vizsgálatáért 1 pont jár.*
(4)		
Ha $k = -1$ és $k - 3 = -p^2$, akkor $p^2 = 4$, tehát $p = 2$.	1 pont	
Ha $k - 3 = -1$ és $k = -p^2$, akkor $k = 2$, tehát $p^2 = -2$, ami nem lehet.	1 pont	*A (4) eset vizsgálatáért összesen 2 pont jár.*
A feladat feltételeinek a $k = 4$ és az $k = -1$ felel meg.	1 pont	
Ez esetekben lesz a $k^2 - 3k$ kifejezés egy prímszám, a 2 négyzetével egyenlő.		

2. megoldás		
A feltétel szerint		
$k^2 - 3k = p^2$, ahol p prímszám.		
$K^2 - 3k$ kifejezés mindenképpen páros, mert	*2 pont*	
- ha k *páros*, akkor két páros szám különbsége páros,	*2 pont*	
- ha k *páratlan*, akkor két páratlan szám különbsége szintén páros.	*2 pont*	
Így tehát p^2 is páros.		
Ha p^2 páros, akkor p csak 2 lehet.	*2 pont*	
Így $k^2 - 3k = 4$,	*1 pont*	
ahonnan $k = 4$	*1 pont*	
vagy $k = -1$.	*1 pont*	
Összesen:	**11 pont**	

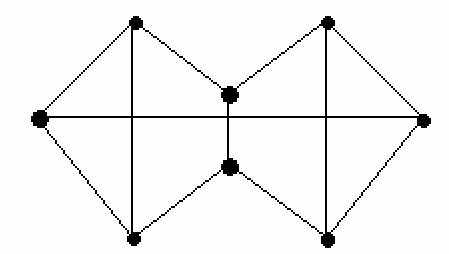
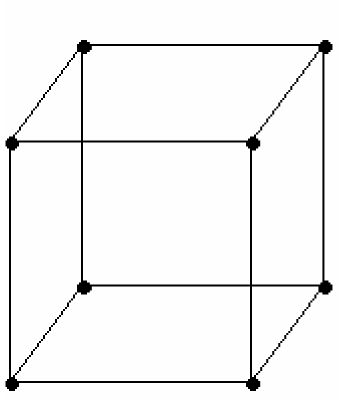
6.		
a)		
366 különböző születésnap lehet.	1 pont	*365 nap esetén is jár a pont.*
Ha minden napra legfeljebb 2 születésnap esik, akkor legfeljebb $366 \cdot 2 = 732$ tanulója van az iskolának.	1 pont	*365 nap esetén 730.*
A 733. tanulónak már biztosan van 2 azonos napon született társa.	1 pont	
Tehát legalább 733-an járnak az iskolába.	1 pont	*365 nap esetén 731. Ha nincs részletes szöveges magyarázat, de a gondolatmenet egyértelműen jó, akkor is megadható a 4 pont.*
Összesen:	**4 pont**	
b)		
Mindhárom helyre 2 lehetőségünk van, így $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ lehetséges számhármas van.	1 pont	*Ha módszeresen összeszámlálja a lehetséges eseteket, akkor az 3 pont. Ha az összeszámlálásban téved, akkor legfeljebb 1 pont adható.*
A 000 nem lehet,	1 pont	
ezért összesen 7 marad.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	
c)		
7 különböző lehetőség van.	1 pont	
Ha mindegyikbe 3 tanuló tartozik, akkor $7 \cdot 3 = 21$ tanuló lenne.	3 pont	*Ez halmazábrán is megmutatható.*
De 22 van, ezért valamelyik csoportban legalább 4 tanuló lesz.	2 pont	
Összesen:	**6 pont**	

d)		
22 = 16 + 3 + *x*	2 pont	
x = 3	1 pont	*Halmazábrából is leolvasható a végeredmény.*
Összesen:	**3 pont**	

7.		
		
a)		
$V=\frac{a^2\cdot\sin\alpha\cdot m}{3}=\frac{54^2\cdot\sin 43{,}6°\cdot 82}{3}=54\ 965{,}4$	1 pont	
A gúla térfogata 54 965,4 cm^3.	1 pont	
Összesen:	**2 pont**	
b)		
A rombusz átlóinak a kiszámítása a derékszögű háromszögből:		
$\sin 21{,}8°=\frac{\frac{f}{2}}{54}$ $f=40{,}11$	1 pont 1 pont	
$\cos 21{,}8°=\frac{\frac{e}{2}}{54}$ $e=100{,}28$	1 pont 1 pont	
Az átlók felének segítségével a Pitagorasz-tétel alkalmazásával kiszámítjuk az oldaléleket.		
$b=\sqrt{\left(\frac{e}{2}\right)^2+82^2}=96{,}11$	1 pont	
Az egyik oldalél 96,11 cm.	1 pont	

$c=\sqrt{\left(\frac{f}{2}\right)^2+82^2}=84{,}42$	1 pont	
A másik oldalél 84,42 cm.	1 pont	
Összesen:	**8 pont**	
c)		
A gúla felszínének kiszámításához szükség van az oldallapok területére. Az oldallapok egybevágó háromszögek, amelyeknek ismerjük mindhárom oldalát. Először koszinusz tétellel kiszámítjuk az egyik szögét:		
$\cos\beta=\frac{96{,}11^2+84{,}42^2-54^2}{2\cdot 96{,}11\cdot 84{,}42}=0{,}8287$.	2 pont	
$\beta=34°$	1 pont	
Az oldallapok területe: $t=\frac{96{,}11\cdot 84{,}42\cdot\sin 34°}{2}=2268{,}5$	1 pont	
Az alaplap területe: $T=\frac{e\cdot f}{2}=\frac{40{,}11\cdot 100{,}28}{2}=2011{,}1$	1 pont	
A = T + 4t = 2011,1 + 4 . 2268,5		
A gúla felszíne: 11 085,1 cm^2.	1 pont	
Összesen:	**6 pont**	

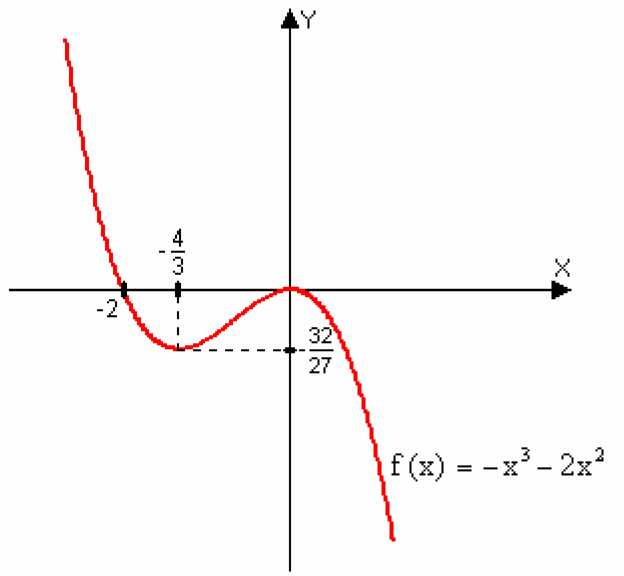
8.		
a)		
Ha bármely egységből csak két kábel indulna ki, akkor azok meghibásodása esetén nem maradna összefüggő a rendszer.	2 pont	
Összesen:	**2 pont**	
b)		
Legalább 3 kábelnek mindegyikből ki kell indulnia.	1 pont	
Mivel 8 egység van, ezért legalább $\frac{8\cdot 3}{2}$ -re van szükség.	1 pont	
Tehát legalább 12 kábel-összeköttetést kell kiépíteni.	1 pont	
Összesen:	**3 pont**	

c)		
 	3 pont	*Két lehetőséget rajzolunk fel, amelyek nem izomorfak, de más jó megoldás is lehet.*
Összesen:	**3 pont**	
d)		
A hibás termék kiválasztásának valószínűsége 0,04.		
A jó termék kiválasztásának a valószínűsége: 0,96.		
Ha 50-ből pontosan 2 hibás és 48 hibátlan lesz: $\binom{50}{2}\cdot 0{,}04^2\cdot 0{,}96^{48}\approx 0{,}2762$.	2 pont	
Ha 50-ből pontosan 1 hibás és 49 hibátlan lesz: $\binom{50}{1}\cdot 0{,}04\cdot 0{,}96^{49}\approx 0{,}2706$.	2 pont	
Ha 50 hibátlan lesz: $\binom{50}{0}\cdot 0{,}04^0\cdot 0{,}96^{50}\approx 0{,}1299$.	2 pont	
A keresett valószínűség a fenti három valószínűség összege: 0,6767.	2 pont	
Összesen:	**8 pont**	

9.		
a)		
A grafikon átmegy az origón, ezért a (0;0) pont illeszkedik rá, behelyettesítve: $d = 0$.	1 pont	
Az x tengely az origóban érinti, így $y'(0) = 0$.	1 pont	
$y' = -3x^2 - 4x - c$	1 pont	
A feltételből: $c = 0$.	1 pont	
Összesen:	**4 pont**	

b)		
A függvényvizsgálatot az első derivált segítségével végezzük el: $y' = -3x^2 - 4x$	1 pont	
$y' = -3x^2 - 4x = 0$	1 pont	
$x_1 = 0$	1 pont	
$x_2 = -\frac{4}{3}$	1 pont	

	$x < -\frac{4}{3}$	$x = -\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3} < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$		
y'	–	0	+	0	–	5 pont	
y	csökkenő	lokális minimum értéke: $-\frac{32}{27}$	növekvő	lokális maximum értéke: 0	csökkenő		

Összesen:	**9 pont**	
c)		
Zérushelyek: $x = 0$ és $x = -2$	1 pont	
Függvényábrázolás	2 pont	
		
Összesen:	**3 pont**	